

## Systémy pretínajúcich sa množín

1. Nech  $\mathbb{F}$  je systém pretínajúcich sa podmnožín  $n$ -množiny  $X$ . Ukážte, že existuje systém  $\mathbb{F}'$  pretínajúcich sa podmnožín  $X$  taký, že  $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}'$  a  $|\mathbb{F}'| = 2^{n-1}$ .
2. *Slničnica* s  $k$  lupenmi a stredom  $S$  je taký systém  $S_1, \dots, S_k$  množín, pre ktorý  $S_i \cap S_j = S$ , pre všetky  $i \neq j$ , a množiny  $S_i \setminus S$  sú lupene; navyše požadujeme aby žiadny lúpeň nebol prázdny. Napríklad, systém navzájom disjunktných neprázdnych množín je slničnica s prázdny stredom.  
Dokážte: Nech  $\mathcal{F}$  je systém  $s$  prvkových množín. Ak  $|\mathcal{F}| > s!(k-1)^s$  tak  $\mathcal{F}$  obsahuje slničnicu  $k$  lupenmi.  
Pomôcka: postupujte indukciou na  $s$ . Prípád  $s = 1$  je zrejmý. Pre  $s \geq 2$  uvažujte najväčší podsystem navzájom disjunktných množín z  $\mathcal{F}$ . Ak veľkosť tohto podsystemu je najvyšš  $k-1$ , uvažujte zjednotenie  $B$  množín tohto systemu, zistite v aspoň kolkých množinách z  $\mathcal{F}$  je určite aspoň jeden prvok z  $B$ . Vhodná modifikácia  $\mathcal{F}$  a indukčný predpoklad poskytuje požadovanú slničnicu v  $\mathcal{F}$ .
3. Problem 6. C z van Lint.